

北京高校第六届青年教师教学基本功比赛

● 类别：理工类

● 组别：A 组

北京高校第六届青年教师教学基本功比赛教案

● 课程名称：概率论与数理统计

● 教案主题：条件概率

● 授课人：李再兴



1 教案

1.1 引例

提出问题

9 分钟

简单回顾前面学习的内容（目的：承上启下）

概率论的研究对象和所关注的问题——事件及其发生的概率

强调“单个事件发生的概率”

- 提问1：一个事件的发生对另一个事件的发生是否会有影响呢？

1 分钟

用概率论的语言来描述。然后点明今天学习的内容——条件概率。

意图：通过提问引出本节课的内容——条件概率。同时帮助学生熟悉概率统计的术语。

- 提问2：

1 分钟

什么是条件概率？

怎样计算条件概率？

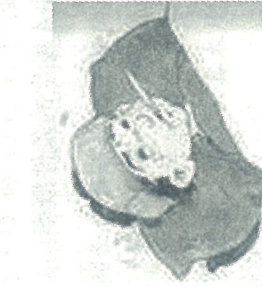
为什么要研究条件概率？（或者说，它有何作用？）

关键点和意图：提高语调提问这3个问题。强调本节课的课堂内容将围绕这3个问题展开。通过提问，吸引学生的注意力，随后的课堂活动就变成了寻找答案解决问题的过程。

- 引例1（直观认识）：

1 分钟

“发热发烧病人患‘非典’SARS的概率”和“普通病人患‘非典’SARS的概率”



P （病人得“非典”SARS | 病人发热发烧） $> P$ （病人得“非典”SARS）

关键点和意图：通过大家熟知的生活中的现象，让学生对条件概率有直观认识。也初步认识到研究“条件概率”的必要性。

- 引例2（理性认识）：

6 分钟

观察有两个小孩的家庭，样本空间 $\Omega = \{\text{男男, 男女, 女男, 女女}\}$ ，事件 $A = \{\text{家中至少有一男孩}\}$ ，事件 $B = \{\text{家中至少有一女孩}\}$ ，求：

- (1) 事件 A 发生的概率？
- (2) 事件 AB 发生的概率？
- (3) 事件 A 发生的情况下，事件 B 发生的概率？

教学方式：利用古典概型中的理论知识，通过提问的方式，和学生一道算出。

(1)

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

(2)

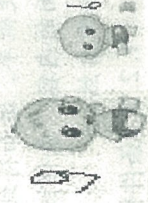
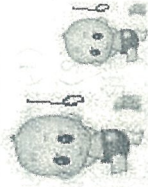
$$P(AB) = \frac{2}{4}$$

重点推理出

- (3) 事件 A 发生的情况下事件 B 发生的概率：

$$P(B|A) = \frac{2}{3}$$

引导学生发现：



$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

(4) 推广: (理论证明) 在古典概型的场合结论仍成立, 即, 在古典概型中, 设试验的样本空间包含的样本点总数为 n , 事件 A 包含的样本点数为 $m(m > 0)$, 积事件 AB 包含的样本点数为 k , 则:

$$P(B|A) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

得出“条件概率”的定义(不完全归纳法), 过渡到下面的内容。

关键点和意图: 在推理中, 通过 PPT 演示, 计算无条件概率时, 向学生展示全样本空间中的样本点和所求事件所包含的样本点(既是复习古典概型的理论, 又是为了突出随后的条件概率中压缩了的样本空间)。计算条件概率时, 用 PPT 动态演示: 将其他的样本点遮住, 只剩下压缩后的样本空间中的样本点, 在此基础上推理。推理计算过程中特别强调是在压缩了的样本空间上考虑问题。这也是条件概率的本质所在。同时, 这种方法是计算条件概率的一种原始方法, 要求学生掌握。

1.2 条件概率及其性质

解决问题的主要方法

20 分钟

1.2.1 条件概率的定义

1 分钟

定义 1: 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

若 $P(B) > 0$, 称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

关键点: $P(B|A)$ 要求 $P(A) > 0$; $P(A|B)$ 要求 $P(B) > 0$ 。从实际问题的角度和纯数学的角度对此要求给出解释。

1.2.2 条件概率的性质

6 分钟

• 基本性质:

4 分钟

(1) 非负性: $P(B|A) \geq 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega|A) = 1$;

(3) 可列可加性: 设 $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

教学方式: 从“条件概率”的定义引导学生发现这些基本性质(板书演示过程, 见“板书设计”中黑板 2 的推导 1)。

• 其他性质:

2 分钟

教学方式: 发问

(1) 概率的定义?

(2) 条件概率是否是概率?

结论: 概率所具有的一切性质, 条件概率都具有! (列举两条说明)

第 1 条: $P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$

第 2 条: $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$

(3) 布置课后问题: 针对概率的各条性质, 写出条件概率所对应的性质, 并给出仔细的推理。

(4) “条件概率”和“无条件概率”之间究竟有怎样的关系呢(自问自答, 过渡到下文)?

关键点和意图: 从条件概率的定义, 观察发现其基本性质, 通过“提问启发”使学生明确条件概率也是概率, 进而得到“条件概率”的更多性质。培养学生发现问题解决问题的能力。再通过提问, 自然地过渡到下面的内容“条件概率”和“无条件概率”之间的关系。整个教学过程十分流畅, 让学生感到要学的知识非常自然。

1.2.3 条件概率和无条件概率之间的关系

6 分钟

教学方式: 启发学生思考, 让学生考察前面提到的两个引例, 得到

> 引例 1

(1) 条件概率 $P(B|A) = P(B)$? (课后思考题, 举例)

< 引例 2

具体实现方式和意图: 使用 PPT 中超链接手法, 重现前面的两个引例。通过提问, 让学生思考。应遵循“由易到难”的原则, 让学生亲自观察引例 1, 然后亲自动手计算引例 2 中相应的无条件概率, 得出条件概率与无条件概率之间关系的部分结论, 并用动画的形式显示这些结果。根据已经得出的结论 (或者大于, 或者小于), 再通过提问, 启发学生去发现新的问题。这样, 培养了学生解决问题和发现新问题的能力。此外, 这里还采用了“前后呼应”和“承前启后”的手法, 以及自然延伸的课后思考题, 这些都为后面讲述事件的独立性埋下了伏笔。

考察几个极端情形, 教学方式: 以课堂练习的形式给出

$$P(\Omega|A) = 1 \quad P(A|\Omega) \neq 1$$

$$P(A|\Omega) = P(A) \quad P(A|A) = 1$$

得出事件 A, B 具有包含关系时条件概率和相应无条件概率之间的关系。(口述)

(2) 设 $P(A) > 0$, 且 $B \subset A$, 则 $P(B|A) \geq P(B)$ 。

教学方式: 在黑板上对该结论给出证明 (见“板书设计”里板书二中的 2)。

(3) 条件概率 $P(B|A) \geq$ 积事件概率 $P(AB)$
缩小的样本空间 Ω_A 样本空间 Ω

教学方式: (3) 由 (1), (2) 推出

条件概率和积事件概率之间比较时, 重点强调“条件概率是在缩小的样本空间上考虑问题的” (突出条件概率的本质)。

意图: 从“特殊”到“一般”, 符合学生的认知规律。通过实例观察、理论推理等多种思维方式和课堂练习等手段, 掌握条件概率和无条件概率之间的关系。对“条件概率”的认识进行了升华, 并通过和积事件概率的比较进一步认识其本质。同时也和引例 2 中条件概率的计算作了呼应。

1.2.4 例题讲解

8 分钟

例 1: 某种动物由出生算起活 20 岁以上的概率为 0.8, 活到 25 岁以上的概率为 0.4。如果现在有一个 20 岁的这种动物, 问它能活到 25 岁以上的概率是多少?

思路分析: 对这类应用性问题怎么做? (提问, 自问自答)

第一步: 将问题用概率论的语言来描述, 即引进事件、给出所求。

第二步: 用公式和概率的性质来求事件的概率。

解: 设 A 表示“能活 20 岁以上”的事件, B 表示“能活 25 岁以上”的事件, 则有 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, 又因为 $AB = B$, 从而 $P(AB) = P(B)$, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

教学方式: 两个例题都用 PPT 来逐步演示

例 2: 已知 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{6}$, 求 $P(\bar{B}|\bar{A})$ 。

思路分析: 直接应用公式, 关键是求 $P(AB)$ 。

解: 由条件概率的定义和对偶率知,

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\overline{AB})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{A})} = \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(AB))}{1 - P(A)}$$

因为 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

从而

$$P(B|A) = P(AB)/P(A)$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{12}$$

意图：用两个例题来巩固条件概率的计算公式。例1是熟悉条件概率的计算公式，对学生答题规范化，同时也了解相关实际问题的处理途径。在一定程度上和引例1有着某种呼应。例2既巩固了条件概率的计算，又引出了下面的“乘法公式”。这种过渡，不仅传授了知识，也培养了学生总结问题的能力。同时也回答了课堂上开始的两个问题“什么是条件概率”和“怎样计算条件概率”。

关键点：强调计算条件概率的两种方法：①直接应用条件概率定义中的计算公式（例1和例2）；②提醒引例2中所用到的思想，缩小样本空间（提醒这一点，为后面作铺垫，因为后面要用到）。

1.3 乘法公式 导出的主要结果 11分钟

1.3.1 乘法公式

定义2：设 $P(A) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

同理，设 $P(B) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

通常称以上两式为概率的乘法公式。

对于三个事件的积事件呢？（提问，过渡到下面的推广）

推广1：设 A, B, C 为3个事件，且 $P(AB) > 0$ ，则有

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

教学方式：在乘法公式的基础上推理（黑板板书）给出，PPT显示

详细推理过程见“板书设计部分”第二块黑板上的板书3。

推广2：设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个事件， $n \geq 2$ ，且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ ，则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \times P(A_{n-1} | A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \times \cdots \times P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

教学方式：课堂练习给出

有了“条件概率”引出来的“乘法公式”，除了可以在计算问题中帮助计算一些条件概率外，还有什么用呢？我们来看一个例子。（口述）

意图：通过“乘法公式”的阐述和论证，让学生进一步熟悉和领悟“条件概率和积事件概率”之间的关系，既是对前面二者关系的补充说明，也为下面的应用——回答课堂上的第三个问题作了铺垫。通过提问，过渡到下面的内容。

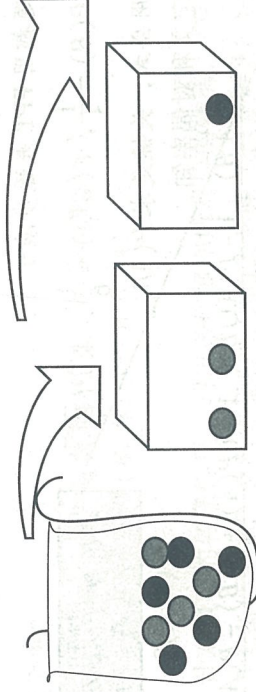
1.3.2 举例

6分钟

例3：（摸球试验）设袋中有 r 个红球，1个黑球，每次从袋中任取一个球后都不放回，试求事件 $A =$ “第 k 次取到黑球”的概率。

（例3讲解5分钟）

设事件 $A_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 为“第 i 次取到红球”，则事件 \bar{A}_i 为“第 i 次取到黑球”。



思路分析：“第 k 次取到黑球”，即“前 $k-1$ 次都取到红球，第 k 次取到黑球”；然后利用乘法公式即可解。

解法 1: 所求事件 A 的概率为:

乘法公式的推广²

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \bar{A}_k) &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdots P(A_{k-1} | A_1 A_2 \cdots A_{k-2}) P(\bar{A}_k | A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) \\ &= \frac{r}{r+1} \cdot \frac{r-1}{r} \cdots \frac{r+1-(k-2)}{r+1-(k-2)} \cdot \frac{1}{r+1-(k-1)} \\ &= \frac{1}{r+1} \end{aligned}$$

已经用乘法公式解答了较复杂事件的概率求法, 乘法公式是基于条件概率的, 条件概率的本质是在压缩了的样本空间上考虑事件的概率, 那么能否借用这种思想来考虑问题呢? 或者说, 能否选择恰当的而且是缩小了的样本空间来考虑问题呢? (口述结束后给学生 30 秒思考时间)

意图: 启发学生思考, 引导学生抓住问题的本质, 培养学生钻研的能力。

通常情况下, 把“取 k 次球”的全部可能情况作为样本空间来考虑, 这样就很烦琐。注意到我们关注的是第 k 次取球的情况。对于“第 k 次取球”而言, $r+1$ 个球都有可能取到, 唯有“取到黑球”才是有利事件, 于是这种分析为我们提供了一种新的思路。(口述)

解法 2: 取样本空间为第 k 次取到球的全部可能结果, 则样本空间共含有 $r+1$ 个样本点; 关注的事件 A 是“第 k 次取到黑球”, 它含有的样本点个数为 1, 所以根据古典概型中概率的计算公式, 所求事件的概率为 $\frac{1}{r+1}$ 。

总结: 这样, 我们使用了两种方法计算比较复杂事件的概率:

1 分钟

(1) 利用条件概率的计算公式和由此变形的乘法公式; (用“形”解题)

关键: 将关注的复杂事件分解成一系列易于求概率的简单事件。

优点: 思路简单, 易于理解。

缺点: 所求的事件不能太复杂, 否则, 即使在理论上可以看成若干简单事件的复合, 也很难求出。

(见下面的问题 1)

(2) 利用条件概率的本质和由此延拓的思想。(用“神”解题)

关键: 选取适当的尽可能小的样本空间作为研究对象。

优点: 简单快捷, 容易求。

缺点: 初学时不太容易理解。

关键点和意图: 一题多解, 使用“条件概率的‘形’和‘神’”来解题。强调两种方法解题时各自的³关键。这个例子也回答了开始时提出的第三个问题, 即利用条件概率可以求得一些复杂事件的概率。至此, 本堂课提出的 3 个问题都得到了回答。

1.4 相关问题

7 分钟

总体意图: 联想发现, 引导学生发散性思维活动, 培养创新能力。

具体实施: 以例 3 为载体, 通过对例 3 做出不同的变化, 进一步巩固本节课的思想方法, 特别是“选取尽可能小的样本空间”的方法, 同时要求用本节课的理论来解释生活中的现象。另外, 介绍相关科研领域, 引发思考和讨论, 并鼓励进行研究。

例 3 考虑的是袋中只有 1 个黑球的情形, 若有 b 个黑球, 情形会怎样呢? (口述)

问题 1: 设袋中有 r 个红球, b 个黑球, 每次从袋中任取一个球后都不放回, 试求事件 $A =$ “第 k 次取到黑球”的概率。

思路分析: 用乘法公式考虑问题, 本题就很复杂, 因为在前面的 $k-1$ 次取球中也可以出现若干次黑球。这里利用“条件概率的本质”所延伸出来的思想解题。

解: 取样本空间为第 k 次取到球的全部可能结果, 则样本空间共含有 $r+b$ 个样本点; 关注的事件是“第 k 次取到黑球”, 它含有的样本点数为 b , 所以根据古典概型的概率计算公式, 所求事件的概率为 $\frac{b}{r+b}$ 。

对问题1作修改,变为:

设袋中有 r 个红球, b 个黑球。

问题2(1):若每次从袋中任取一球,观察其颜色后将原球放回,并加入 c 个同色球,那么,事件 $A =$ “第 k 次取到黑球”发生的概率呢?

此时,每次取球后都会增加下一次取到同色球的概率。这与生活中传染病所出现的现象一致:每次发现一个传染病患者,以后都会增加再传染的概率。这时候的模型称为“传染病模型”。

传染病模型是当今生物统计领域研究的热点问题之一。

(效果:与引例1中的SARS 传染病相呼应)

教学方式:先阐述解释,然后用PPT显示

若将“放入 c 个同色球”改为“放入 c 个异色球”,即(口述)

问题2(2):若每次从袋中任取一球,观察其颜色后将原球放回,并放入 c 个异色球,那么,事件 $A =$ “第 k 次取到黑球”发生的概率呢?

此时模型称为“安全模型”。因此:每当事故发生(比方说红球被取出,将其放回后再放入 c 个黑球),安全工作就会抓紧一些,下次再发生事故(再取到红球)的概率就会减少;而当事故没有发生(黑球被取出),安全工作就放松一些,下次再发生事故的就会增大。

所有这些模型统称为罐子模型或者Polya模型。罐子模型,特别是其中的传染病模型,是统计领域里的重要研究内容。更多的背景知识、应用及相关研究课题可参阅相关的参考文献,如Bai and Hu (1999, *Stochastic Processes and Their Application*, 80(1): 87-101),陈桂景等(2006,应用概率统计22(3),281-287)。

作为探索的第一步,大家可以首先考虑问题2中(传染病模型,安全模型)事件 A 发生的概率。然后去阅读相关文献做更多了解。(口述)

要求:问题1要求学生熟练掌握,灵活使用;问题2中介绍到模型和生活现象的联系,要求学生领会把握。

意图:通过展示模型的不同形式,用所学的理论来解释生活中的不同现象,“理论联系实际”提高学生的学习兴趣;同时通过知识延伸,告诉学生相关的科研前沿领域。教学内容反映了学术发展趋势。

1.5 课堂小结和作业

• 课堂小结:

(1) 概念:条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ \longleftrightarrow 乘法公式 $P(AB) = P(B|A)P(A)$

(2) 计算条件概率 $P(B|A)$ 的两种方法:

① 使用定义 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 求之。

② 分析被压缩后的样本空间(利用条件概率的本质思想)。

(3) (延伸的)求复杂事件概率的两种方法(“形”和“神”):

① 利用条件概率和乘法公式(“形”);

② 选取尽可能小的样本空间(条件概率本质思想的拓展)(“神”)。

• 作业:

(1) 教材中P48, T3(设计计算题,熟悉基本方法)。

(2) 课堂留下的条件概率性质的证明(设计证明题,加强对概念的理解)。

(4) 思考题(研究型题)。

抓阄是否与次序有关?

课后思考题?

① 有5个阄,其中2个阄内写着“有”字,3个阄内不写字,5人依次抓取,

问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

② 有 n 个阄,其中 $m(m < n)$ 个内写着“有”字,其余阄内不写字, n 个人依次抓取,问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?



关键点: ① 将社会现象用概率论的语言来描述, 培养学生分析解决实际问题的能力; ② 将问题分成两步, 通过由简单到复杂, 由特殊到一般的方式, 传授给学生分析复杂问题的方法。

提示与要求: 思考题中的①和②都使用“条件概率”的思想(即“神”)来考虑。同时对①也使用乘法公式来考虑, 对②可尝试用乘法公式。

意图: (1) 用思想(“神”)来解, 学生会发现这种方法的好处, 深刻理解条件概率的本质及其相关的思想; 然后尝试用“乘法公式”来解。这样能更好地理解理解和体会两种方法。

(2) 要求用乘法公式来解, 除了做比较之外, 另一个目的(主要的)是为下节课要讲的全概率公式做铺垫。

(3) 以一个“抓阄”的实际问题结尾, 与开始的“非典”实际问题(引例1)相呼应, 这会给人以回味, 激励学生思考。

1.6 附录

1.6.1 板书设计

两块黑板。

板书一、提纲挈领式(保留。本堂课结束时呈现在黑板上的样式)

1.4 条件概率

一、引例

二、条件概率及其性质

1. 定义

2. 性质

3. 条件概率与无条件概率之间的关系

4. 例题讲解

三、乘法公式

1. 乘法公式

2. 应用举例

四、相关问题

五、课堂小结和作业

关键点和意图: 板书设计分为两部分, 即宏观的和微观的。宏观的就是上面的提纲挈领式, 每进入相关内容的讲解后, 在黑板上写下小标题, 便于学生知道教学进程。内容讲解完毕, 黑板上留下上面的板书(纲要), 结合小结(PPT)上的重点内容, 使得这次课“有血有肉”; 微观上, 主要是对部分推导细节和重难点内容作补充和辅助解释。

板书二、详细推理过程及辅助解释

1. 条件概率基本性质的证明

证明: (1) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \geq 0$

(2) $P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

(3) $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i A\right)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$

2. 条件概率和相应的无条件概率之间关系的推导

证明: 因为 $AB = B$ 并且 $0 < P(A) \leq 1$, 从而

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B)$$

3. 三个事件的乘积事件的乘法公式推理

证明: 因 $0 < P(AB) \leq P(A)$, 故右边的条件概率都存在, 从而

$$\text{右边} = \frac{P(ABC)}{P(AB)} \cdot \frac{P(AB)}{P(A)} = P(ABC) = \text{左边}$$

1.6.2 参考文献

• 教学参考书:

- [1] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 李贤平. 概率论基础 [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1997.
- [3] 陈希孺. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- 推荐阅读的论文 (与本课程相关的文献):

[1] Bai, Z. D. and Hu, F. F. Asymptotic Theorems for Urn Models with Nonhomogeneous Generating Matrices. *Stochastic Processes and Their Application*, 1999, 80 (1): 87 - 101.

[2] Wei, L. J. The Generalized Polya's Urn Design for Sequential Medical Trials. *Annals of Statistic*, 1979 (7): 291 - 296.

[3] 白志东, 陈桂景, 胡飞芳. 带有时序趋势的序贯试验概率罐子模型中的极限定理 [J]. 数学年刊, 2001, 22A (1): 89 - 96.

[4] 陈桂景, 胡舒合, 洪圣岩. 多档次试验结果下的一种罐子模型 [J]. 应用概率统计, 2006, 22 (3): 281 - 287.

意图: 所介绍的教学参考书供学生课后阅读, 查缺补漏, 复习并巩固知识点, 加深对本次内容的理解并建立体系化认识; 所推荐的论文供学有余力的学生课外阅读, 培养他们的学习兴趣, 同时开始体验科研活动。

2. 关于教案设计的补充说明

2.1 “概率论与数理统计”课程简介

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象规律的数学学科。主要讲授处理随机现象的基本概念、基本方法和基本理论。本课程是学习“线性统计模型”“实用多元统计分析”等专业课程的基础, 也是理工类学生从事其他相关专业所必修的课程。

本课程具有理论联系实际的特点, 有很强的理论性和很强的应用性。由于这门课程所处理的对象不是经典的确定性现象, 而是随机现象, 因而, 它的处理方法与其他数学学科也很不一样: 解决问题时更着重概念和思路。这门课程的一大优点是: 具有较强的直观意义, 有利于理解和想象。理论联系实际、用所学的理论知识来解释生活中相关的随机现象是学好、学活这门课的有效途径。

本课程的学习目标是:

(1) (知识层面) 通过本课程的学习, 使学生深入了解随机现象统计规律性的基本概念, 熟练掌握处理随机现象的基本理论和方法, 为进一步学习提供较坚实的基础和学习工具。

(2) (能力层面) 掌握概率统计方法, 用之分析和解决问题, 特别领悟概率统计的基本思想和处理随机现象的思维方式。

(3) (认知层面) 通过启发式教学、研究型教学, 重现经典理论的研究历程。既开拓学生的知识范围, 体验科研的辛苦和乐趣, 又培养他们继续学习和从事研究的兴趣和热情。

2.2 教学任务

在 50 分钟内讲授“第一章 随机事件与概率”里“1.4 条件概率”中的第一、第二两部分:

1.4.1 条件概率的定义

1.4.2 乘法公式

2.3 教学目标

2.3.1 知识层面

- 了解条件概率的背景, 掌握其定义及其本质;
- 掌握条件概率和无条件概率之间的关系;
- 掌握条件概率的计算方法;
- 掌握乘法公式的定义、证明方法和它与条件概率之间的关系;

- 了解与条件概率相关的社会现象、与条件概率有关的科研热点问题。

2.3.2 能力层面

- 学会用两种方法计算条件概率，领悟条件概率的本质思想；
- 学会利用乘法公式和条件概率本质思想所延拓的思想，计算一些复杂事件的概率；
- 学会利用条件概率和乘法公式来解释相关的社会现象。

2.3.3 认知层面

- 从条件概率的推理和条件概率与无条件概率之间的关系中，认清条件概率的本质；
- 通过条件概率的相关理论与现实生活中相关问题的联系，提高对“实践—理论—再实践”的认识，并且认识到“概率统计”这门课程的理论性、科学性和实用性；
- 通过本节课的学习，让学生领悟“从现有的理论发现问题——从生活中寻找启迪性的现象——从现象中提炼规律——解决问题——得到新的结果——发现新的问题”，提高对规律的认识和感知。

2.3.4 教学重点与难点

2.3.4.1 教学重点

条件概率的计算；乘法公式的运用。

处理方法：

- 重点讲解；多媒体与板书相结合；
- 启发学生主动思考；
- 通过例题来熟悉和巩固，一题多解，一题多变。

2.3.4.2 教学难点

条件概率的理解，条件概率和无条件概率之间的关系；
用条件概率的本质思想及其延拓的思想计算复杂事件的概率。

处理方法：

- 利用生活中的现象，通过实例给学生感性直观认识（如：引例1），同时结合严密的逻辑分析和推理（如：引例2）；
- 运用多媒体课件和提问启发式教学方式（如：引导学生发现条件概率和无条件概率之间的关系）；
- 遵循从简单到复杂、从特殊到一般的原则（如：条件概率的导出）；
- 通过例题讲解、课堂练习、一题多解、一题多变等多种形式来学习和巩固（如通过例3的变化来掌握思想方法以及不同知识点之间的联系）。

2.3.5 设计思路

本部分内容一方面具有较为直观的意义；另一方面，要上升为数学上的一般结论，又得借助于符号语言（概率论术语）和逻辑推理。在教学过程中，要恰当地处理直观感觉（对现实问题的直观感悟）和数学推理之间的关系。既引导学生从直观上发现问题，又通过严密的理论知识来解释实际生活中的现象，同时明确各个知识点之间的相互关系。

2.3.5.1 “现象”——“理论”——“现象”

这是课堂教学的主线之一，符合人们的认知规律。与“实践—理论—实践”的哲学思维一脉相承。首先提出问题（什么是条件概率？怎样计算？），然后运用引例1，介绍相关的社会现象。一方面有助于引起学生的学习兴趣；另一方面可以通过生活中的例子给学生直观上的认识，同时对这次要学习的内容有感性的认识。

设计依据：创设问题情境、引起注意和好奇心理，是激发学习动机、进行有效学习的重要因素。

举第二个例子（即引例2）利用前面学习的知识，进行详细的分析推理。

设计依据：从现象上升到理论所进行的有效而自然的转换，让学生在不知不觉的愉快氛围中学习新的知识。

两个引例之后（学生既有感性认识，也有理性认识），系统介绍理论知识。

设计依据：遵循循序渐进的原则，符合认知规律，通过理论的学习培养学生严密的思维能力。

用所学的理论知识来解释新的社会现象，这种结论是建立在严格的数学推理上的。

设计依据：将理论应用于实践，即“理论联系实际”，这样既巩固了知识点，又培养了学生的学习兴趣和解决实际问题的能力。

2.3.5.2 “经典理论”与“科技前沿”

讲授完主要理论，条件概率的定义、性质以及由此延伸的乘法概率公式，就分析讲解例题3（摸球模型）。课本上的摸球模型和条件概率是概率论中的经典知识，通过对摸球方式的改变，即摸出某色球之后，再放入同色球等，联系生活中传染病传染的概率变化，将经典的摸球模型延拓到传染病模型上来。前者是经典理论，后者是当今生物统计研究的热点问题之一。

设计依据：通过研究前沿问题的介绍，有助于学生开阔视野，树立正确的专业观念，为学生以后从事相关研究提供部分理论依据，同时也是研究型教学的需要。提供一些相关的科研前沿问题背景，甚至是相关领域的一些公开问题，对提高学生的科研兴趣、调动学生的学习、科研，特别是动脑筋的热情大处有益。

2.3.5.3 问题主线：“提出问题”——“解决问题”——“发现新问题”

● 宏观方面：第一次提出问题（见引例部分），让学生明确这堂课的内容，让学生带着问题来听课，有的放矢，帮助学生提高课堂效率。传授知识的过程，就是解决问题的过程。解决问题，必然要发展相关方法（条件概率及其性质），在发展相关方法的同时往往会有“副产品”出现（条件概率导出了乘法公式），最后的课堂总结，就是以一种收获的姿态来重温这些问题。在解决完部分问题时，又发现新问题（用乘法公式来完整解决抓阄思考题，又牵涉后面要学的全概率公式）。

● 微观方面：知识点的传授是通过提出问题进行的，特别是不同知识点之间的联系也是通过提出问题进行的。例题的讲解也试图通过提问的方式来帮助学生领会、掌握相关的方法，如教案中“关于条件概率的性质”，在介绍完其基本性质之后，通过提问的方式，启发学生去思考并引出更多的性质，并且进一步认识到条件概率和概率之间的联系。

考虑摸球问题，利用所学的条件概率和乘法公式，分析完在里面只有一个“黑球”的场合后（摸到的概率与先后次序无关），提问学生：如果里面有若干个“黑球”，结论怎样？引导学生用“条件概率的本质思想”延伸出来的思想，“选取尽可能小的样本空间”来解题。这就引导学生发现了新方法。布置与现实生活紧密相关的“抓阄”思考题，让学生熟悉新方法的同时，还发现新问题，这实际上是为下次课讲授“全概率公式”埋下了伏笔。

设计依据：通过问题教学，是实施启发式教学、研究型教学的有效途径之一。同时，发现问题，然后解决问题，又发现新的问题，是科学发展的轨迹。通过课堂上的问题式教学，在一定程度上是对经典理论研究历程的再现。通过问题教学，得到许多“发现点”，通过这些问题的发现和解决，提高学生的自信心，激发学生的求知欲和创造欲，培养学生的创新意识和创新能力。

2.3.5.4 “前后呼应”

在教学中运用“前后呼应”的方法。比如，将两个引例在课程开始的时候给出来，使学生对条件概率产生感性认识和部分理性认识。讲授完条件概率的概念之后，再回到前面的引例，通过对两个引例中条件概率和无条件概率之间大小关系的分析，进而对条件概率有更深入的认识。

将用于巩固条件概率和乘法公式的摸球模型分析后，延伸至传染病模型，恰好与第一个关于SARS的传染病相互呼应。

整节课以一个“抓阄”的实际问题作思考题结束，呼应了课堂的首尾，都“回到现实问题”。

设计依据：前面内容是对后面内容的铺垫，后面内容是前面内容的升华。这种“前后呼应”的方式，可以把相关的知识点理解得更加深入。

2.3.6 教学手段

多媒体课件与板书相结合。以课件为主，少量板书。板书用来提示课程内容，同时进行简短问题分析，帮助学生对重点、难点问题的理解。

2.3.7 教学反思与总结

课程结束后，反思整个教学过程，总结经验教训。此外，根据学生的课后作业和下课后对学生的答疑情况，进行总结反思，不断改进现有的启发式研究型教学。